

Series de Fourier de una a varias dimensiones

Respuestas de Microsoft Copilot en resaltado son los prompts.

Si tengo una ecuación del tipo $Y = a * \text{seno}(b * X + c) + d * \text{seno}(e * X + f) + g * \text{seno}(h * X + i) + \dots$ donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ son números reales, ¿Cualquier curva $Y = F(X)$ con otras funciones, puede ser representada por la de ese tipo en un rango finito de X ?

Sí, con una precisión arbitrariamente buena bajo condiciones bastante generales. Lo que estás describiendo es esencialmente una **serie de Fourier**:

$$Y(X) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(\omega_n X + \phi_n)$$

donde cada término tiene amplitud A_n , frecuencia ω_n y fase ϕ_n .

Caso clásico: funciones periódicas

Si $F(X)$ es periódica y cumple condiciones bastante suaves (continua, o incluso con algunas discontinuidades finitas), entonces existe una serie de Fourier que converge a F (o al valor medio en los puntos discontinuos).

En ese sentido, una suma infinita de senos y cosenos puede representar exactamente la función.

Caso de un intervalo finito

Si solo te interesa un intervalo finito:

$$X \in [a, b]$$

entonces el resultado es todavía más fuerte.

Teorema de aproximación

Las combinaciones lineales de funciones seno y coseno son densas en el espacio de funciones continuas sobre un intervalo compacto. Esto significa que:

Para cualquier función continua $F(X)$ definida en $[a, b]$, y para cualquier error $\varepsilon > 0$, existe una suma finita de senos y cosenos cuya diferencia con $F(X)$ es menor que ε en todo el intervalo.

Es decir:

$$|F(X) - S(X)| < \varepsilon$$

para todo $X \in [a, b]$.

Por lo tanto, **cualquier curva continua puede aproximarse tan bien como se desee mediante una suma suficientemente grande de senos.**

¿Solo senos? ¿Sin cosenos?

Tu expresión solo usa senos:

$$a \sin(bX + c)$$

Pero usando la identidad

$$A \sin(\omega X + \phi) = A \cos(\phi) \sin(\omega X) + A \sin(\phi) \cos(\omega X)$$

cada seno con fase equivale a una combinación de un seno y un coseno de la misma frecuencia.

Y recíprocamente, cualquier combinación de seno y coseno puede escribirse como un único seno con fase.

Por lo tanto, permitir fases arbitrarias hace que tu expresión tenga esencialmente la misma capacidad que las series de Fourier habituales.

¿Puede representarse exactamente cualquier función?

Depende de qué signifique "representar".

Con un número finito de términos

No.

Por ejemplo,

$$F(X) = e^X$$

o

$$F(X) = X^2$$

en general no pueden escribirse exactamente como una suma finita de senos.

Solo pueden aproximarse.

Con infinitos términos

Muchas funciones sí pueden representarse exactamente mediante una serie convergente.

Por ejemplo:

- polinomios,
- exponenciales,
- funciones continuas arbitrarias en un intervalo,
- funciones con ciertas discontinuidades,

tienen desarrollos de Fourier apropiados.

Más allá de Fourier

Tu expresión es incluso más general que una serie de Fourier clásica porque permites que las frecuencias

$$b, e, h, \dots$$

sean números reales arbitrarios, no necesariamente múltiplos enteros de una frecuencia fundamental.

Eso da aún más flexibilidad para aproximar funciones.

De hecho, existe una conexión con el análisis armónico y con los resultados que fundamentan las redes neuronales: sumas de funciones simples (como senos) pueden aproximar una enorme clase de funciones.

Respuesta corta

Sí. Si $F(X)$ es continua en un intervalo finito, entonces para cualquier precisión deseada existe una suma finita de términos del tipo

$$A_k \sin(\omega_k X + \phi_k)$$

que aproxima $F(X)$ tan bien como quieras en todo el intervalo. Sin embargo, en general **no podrá representarse exactamente con un número finito de términos**, salvo para funciones que ya tengan esa estructura particular. Con una serie infinita, la clase de funciones representables es muchísimo más amplia.

Para una serie de datos del tipo $Z = F(X,Y)$. Donde F puede ser cualquier conjunto de ecuaciones y tanto X como Y están en un rango definido finito ¿es posible acercarse a ese comportamiento con una ecuación del tipo $Z = a*\textit{seno}(bX+c) + d*\textit{seno}(eY+f) + g*\textit{seno}(hX+i) + j*\textit{seno}(kY+l) + \dots$?

Sí, pero con una condición importante: la forma que propones

$$Z = \sum_n (A_n \sin(\alpha_n X + \phi_n) + B_n \sin(\beta_n Y + \psi_n))$$

es mucho más limitada que una función general $Z = F(X,Y)$.

Qué puede representar esa expresión

Observa que puede reescribirse como

$$Z = G(X) + H(Y)$$

donde:

$$G(X) = \sum_n A_n \sin(\alpha_n X + \phi_n)$$

y

$$H(Y) = \sum_n B_n \sin(\beta_n Y + \psi_n)$$

Es decir, la dependencia respecto a X y Y es **separable y aditiva**.

Por ejemplo, puede aproximar muy bien funciones como:

$$Z = X^2 + \ln(Y + 1)$$

o

$$Z = e^X + \cos(Y)$$

porque son de la forma "algo de X + algo de Y ".

Qué NO puede representar

Una función general de dos variables suele tener interacción entre X e Y .

Por ejemplo:

$$Z = XY$$

o

$$Z = \sin(XY)$$

o

$$Z = e^{X+Y^2}$$

Estas funciones no pueden escribirse como

$$G(X) + H(Y)$$

porque el efecto de X depende del valor de Y y viceversa.

Un test sencillo es mirar la derivada cruzada:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$$

Para cualquier función de la forma $G(X) + H(Y)$, esta derivada es siempre cero.

Para XY :

$$\frac{\partial^2 (XY)}{\partial X \partial Y} = 1$$

luego es imposible representarla así, ni siquiera aproximadamente con precisión arbitraria.

Cómo hacerlo para una función general

Si permites términos que mezclen X e Y , entonces sí.

Por ejemplo:

$$Z = \sum_{m,n} C_{mn} \sin(a_m X + b_n Y + \phi_{mn})$$

o equivalentemente

$$Z = \sum_{m,n} C_{mn} \sin(a_m X + \phi_m) \sin(b_n Y + \psi_n)$$

Esto ya se parece a una **serie de Fourier bidimensional**.

En un dominio finito $(X,Y) \in D$, cualquier función continua $F(X,Y)$ puede aproximarse arbitrariamente bien mediante una expansión de este tipo, usando suficientes términos.

Ejemplo intuitivo

Imagina una superficie:

$$Z = XY$$

sobre el cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$.

- Tu modelo genera superficies que son sumas de "ondas en dirección X " y "ondas en dirección Y ".
- La superficie XY tiene una inclinación en X que cambia según Y , y viceversa.

Por eso necesitas términos que mezclen ambas variables, como:

$$\sin(mX)\sin(nY)$$

para reproducir esa interacción.

Resultado final

- **No**, una suma de senos que dependan separadamente de X o de Y

$$\sum A_n \sin(\alpha_n X + \phi_n) + \sum B_n \sin(\beta_n Y + \psi_n)$$

no puede aproximar cualquier función $F(X,Y)$.

- **Sí**, si permites términos que combinen simultáneamente X e Y , por ejemplo

$$\sum C_{mn} \sin(a_m X + b_n Y + \phi_{mn})$$

o

$$\sum C_{mn} \sin(a_m X) \sin(b_n Y),$$

entonces, en un dominio finito y para funciones continuas, puedes aproximar arbitrariamente bien una función $Z = F(X,Y)$. Esto es esencialmente la idea de las series de Fourier en dos dimensiones.

¿Las series de Fourier pueden escalar a tres o más variables independientes para representar datos de 3 o más dimensiones?

Sí. De hecho, las series de Fourier se generalizan de manera natural a cualquier número de variables.

Dos variables

Para una función

$$Z = F(X,Y)$$

definida en una región finita, una serie de Fourier bidimensional típica es:

$$F(X,Y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{mn} e^{i(mX+nY)}$$

o, usando senos y cosenos,

$$F(X,Y) = \sum_{m,n} A_{mn} \sin(mX)\sin(nY) + B_{mn}\sin(mX)\cos(nY) + \dots$$

Los términos combinan las variables, permitiendo representar interacciones complejas entre X e Y.

Tres variables

Para

$$W = F(X,Y,Z),$$

la expansión simplemente añade otro índice:

$$F(X,Y,Z) = \sum_{l,m,n} C_{lmn} \sin(lX)\sin(mY)\sin(nZ) + \dots$$

Cada término representa un "modo" tridimensional.

Esto se usa muchísimo en:

- Mecánica de fluidos.
- Electromagnetismo.
- Procesamiento de imágenes 3D.
- Modelado de campos físicos.
- Simulación numérica.

n variables

Para una función

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

la forma general es

$$F(x_1,\dots,x_n) = \sum_{k_1,\dots,k_n} C_{k_1\dots k_n} \prod_{j=1}^n \sin(k_j x_j)$$

(o combinaciones de senos y cosenos).

Matemáticamente no hay límite en el número de variables independientes.

El problema práctico: la explosión dimensional

Aunque es posible, aparece el fenómeno conocido como **maldición de la dimensionalidad**.

Supongamos que para describir correctamente una variable necesitas 100 frecuencias.

- 1 variable: 100 coeficientes.
- 2 variables: $100^2 = 10\,000$.
- 3 variables: $100^3 = 1\,000\,000$.
- 6 variables: $100^6 = 10^{12}$.

El número de coeficientes crece exponencialmente con el número de dimensiones.

Por eso una serie de Fourier multidimensional puede volverse impracticable para muchos datos.

Relación con la inteligencia artificial

Curiosamente, los modelos modernos de IA y las redes neuronales surgieron en parte porque las bases de Fourier y otras aproximaciones clásicas sufren mucho con dimensiones altas.

Mientras que Fourier descompone una función en ondas globales,

$$\sin(kX)$$

las redes neuronales construyen aproximaciones a partir de muchas funciones simples combinadas de forma no lineal.

Ambos enfoques tienen un fundamento matemático parecido:

aproximar una función complicada mediante una suma de funciones más simples.

Interpretación geométrica

Si tienes datos de:

- 1 variable → una curva.
- 2 variables → una superficie.
- 3 variables → un hipervolumen en 4D.
- n variables → una hipersuperficie en $n + 1$ dimensiones.

Las series de Fourier pueden aproximar esas estructuras en un dominio finito, siempre que la función sea suficientemente regular (y en muchos casos incluso si tiene discontinuidades).

En resumen: **sí, las series de Fourier escalan a 3, 4, 10 o cualquier cantidad finita de variables independientes. La limitación principal no es matemática sino computacional, porque el número de coeficientes necesarios crece muy rápidamente con la dimensionalidad.**

Para hacer una curva de aproximación a una serie de datos X,Y usando la serie de Fourier $Y = F(X)$. ¿Se recomienda trabajar con los datos normalizados?

Depende de qué entiendas por "normalizar", pero en general **sí suele ser recomendable**, especialmente por razones numéricas y de optimización.

Caso 1: Fourier clásico

Si vas a ajustar una serie del tipo

$$Y = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\omega X) + b_n \sin(n\omega X)]$$

lo más habitual es transformar el dominio X al intervalo de un período conocido.

Por ejemplo, si tus datos están en:

$$X \in [X_{\min}, X_{\max}]$$

puedes definir

$$u = \frac{2\pi(X - X_{\min})}{X_{\max} - X_{\min}}$$

y trabajar con

$$u \in [0, 2\pi].$$

Esto tiene varias ventajas:

- Las frecuencias tienen una interpretación clara.
- Los coeficientes suelen estar mejor condicionados numéricamente.
- Se reduce el riesgo de que las funciones seno y coseno oscilen demasiado rápido o demasiado lento.

Caso 2: Ajuste no lineal con frecuencias libres

Si tu modelo es

$$Y = \sum_{k=1}^N A_k \sin(\omega_k X + \phi_k)$$

y las frecuencias ω_k son parámetros a estimar, la normalización de X es todavía más útil.

Supongamos:

$$X \in [0, 100000]$$

Entonces una frecuencia pequeña como

$$\omega = 0.0001$$

produce el mismo efecto que

$$\omega = 10$$

si previamente escalas X a $[0, 1]$.

Trabajar con parámetros del orden de la unidad suele facilitar la convergencia de los algoritmos de ajuste.

¿Normalizar también Y?

No es obligatorio, pero puede ser conveniente.

Por ejemplo:

$$Y_{norm} = \frac{Y - \bar{Y}}{\sigma_Y}$$

o

$$Y_{norm} = \frac{Y - Y_{min}}{Y_{max} - Y_{min}}$$

Ventajas:

- Evita coeficientes muy grandes.
- Mejora la estabilidad numérica.
- Facilita comparar distintos modelos.

Después de obtener el ajuste, se vuelve a la escala original.

Cuándo NO aporta mucho

Si:

$X \in [0,10]$

y

$Y \in [-5,5]$

ya están en escalas razonables y vas a usar una serie de Fourier clásica, la ganancia por normalizar suele ser pequeña.

Mi recomendación práctica

Para ajuste de datos experimentales:

- 1. Escala X a $[0, 2\pi]$ o $[0, 1]$.
- 2. Centra Y restando su media.
- 3. Ajusta la serie de Fourier.
- 4. Convierte los resultados a las unidades originales.

Es una práctica muy común porque mejora la estabilidad del cálculo sin perder información. Además, si luego comparas modelos con distinto número de armónicos, los coeficientes adquieren una interpretación más consistente.

La regresión simbólica que es probar diversas ecuaciones $Y = F(X)$ y usando procesos como "selección natural" deja de tener sentido si uso series de Fourier de una sola variable independiente, porque esas series de Fourier son más precisas y sólo es modificar coeficientes, mientras que la regresión simbólica se construye y evalúan ecuaciones distintas. ¿Cierto?

No exactamente. La conclusión correcta sería:

Si tu único objetivo es obtener la mejor aproximación posible de una función univariante en un intervalo finito, una serie de Fourier suele hacer innecesaria la regresión simbólica.

Pero si tu objetivo es descubrir la ecuación subyacente o comprender el fenómeno, la regresión simbólica sigue teniendo mucho sentido.

La diferencia fundamental está en el objetivo.

Fourier busca aproximar

Supongamos que los datos provienen de

$$Y = X^2$$

Una serie de Fourier con suficientes términos puede aproximar X^2 tan bien como quieras en un intervalo finito.

Sin embargo, el resultado será algo como:

$$Y \approx a_0 + a_1 \sin(X) + b_1 \cos(X) + a_2 \sin(2X) + \dots$$

que puede tener decenas o cientos de coeficientes.

La aproximación será excelente, pero no te revela que la ley física subyacente era simplemente:

$$Y = X^2$$

Regresión simbólica busca descubrir

La regresión simbólica intenta encontrar una expresión compacta como:

$$Y = X^2$$

o

$$Y = e^{-0.3X}$$

o

$$Y = \frac{X}{1 + X}$$

Aunque la precisión pueda ser algo menor inicialmente, la ecuación suele ser mucho más interpretable.

Por eso la regresión simbólica es muy utilizada en:

- descubrimiento de leyes físicas,
- química,
- biología,
- sistemas dinámicos,
- ingeniería inversa.

Un ejemplo extremo

Imagina que los datos provienen de:

$$Y = \sin(3X)$$

Fourier

Obtendrá algo parecido a:

$$0.9999997 \sin(3X) + 0.0000002 \sin(5X) + \dots$$

Muy preciso.

Regresión simbólica

Idealmente encontrará:

$$Y = \sin(3X)$$

con un solo término.

La precisión es similar, pero la simplicidad es muy superior.

Otro ejemplo

Supongamos:

$$Y = e^{-X} \cos(2X)$$

Una serie de Fourier puede aproximarla en el intervalo $[0, 10]$, pero requerirá muchos armónicos.

La regresión simbólica podría encontrar algo cercano a:

$$Y = e^{-0.998X} \cos(2.003X)$$

que además revela inmediatamente la estructura del fenómeno.

Dónde Fourier gana claramente

Si:

- no te importa la interpretación,
- sólo quieres interpolar o aproximar,
- trabajas con una sola variable,
- tienes suficientes datos,

entonces Fourier suele ser muy difícil de superar.

De hecho, para muchas señales periódicas es la herramienta natural.

Dónde la regresión simbólica sigue ganando

Si quieres:

- descubrir relaciones matemáticas,
- obtener modelos compactos,
- extrapolar fuera del rango de los datos,
- identificar parámetros físicos,

la regresión simbólica puede ser mucho mejor.

Una serie de Fourier suele interpolar muy bien, pero extrapola mal porque no conoce la física del problema.

De hecho, Fourier puede verse como un caso particular

Desde una perspectiva de aprendizaje automático, una serie de Fourier es una regresión lineal sobre una base fija:

$$Y = \sum_k c_k \phi_k(X)$$

donde las funciones base son

$$\phi_k(X) = \sin(kX), \cos(kX).$$

La regresión simbólica, en cambio, busca simultáneamente:

- qué funciones usar,
- cómo combinarlas,
- y cuáles son sus coeficientes.

Es un espacio de búsqueda muchísimo más grande.

En resumen

No diría que la regresión simbólica "pierde sentido". Lo que ocurre es que resuelve un problema distinto.

- **Series de Fourier:** "¿Cuál es la mejor aproximación de esta curva?"
- **Regresión simbólica:** "¿Cuál es la ecuación subyacente más simple y explicativa?"

Si sólo buscas precisión dentro de un intervalo finito para una variable X , Fourier suele ser una opción excelente y con frecuencia más eficiente. Si buscas conocimiento, interpretación o extrapolación, la regresión simbólica sigue teniendo una ventaja importante.